CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI" 2020
Etapa locală, Iași - 17 ianuarie 2020
Clasa a X-a- Secțiunea H1

Problema 1.

a) Arătați că $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Fie $S_n=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}$. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$.

Soluție:

1.a) - 4 p

$$\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2n+1+2\sqrt{4n^2-1}+2n+1}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4n+2\sqrt{4n^2-1}}{2}}=\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}$$ 4p

1.b) - 3p, din care:

$$S_n=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}\right)<\sqrt{2}$$ 1p

Deci, $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}<1$, de unde obținem că $\sqrt{2n+1}<3, 2n+1<9, n<4$. Deci, cel mai mare număr natural n pentru care $S_n<\sqrt{2}$ este $n=3$ 2p

Problema 2.

Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2-(m+3i)z+(m+5)i+m+5$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $m=0$, calculați $f(i)-f(-i)$.

b) Aflați numerele reale m pentru care ecuația $f(z)=0$ are cel puțin o soluție reală.

c) Arătați că funcția $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g(z)=f(z)+f(\varepsilon z)+g(\varepsilon^2 z)$ nu este injectivă, unde ε este un număr complex cu $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$.

Soluție:

2.a) - 1p

$f(i)=7+5i$, $f(-i)=1+5i$, $f(i)-f(-i)=6$ 1p

2.b) - 3p, din care:

$z^2-mz+m+5+(-3z+m+5)=0$, $z\in\mathbb{R}$ 1p

$z=0, m=-5$ sau $z=4, m=7$ 2p

2.c) - 3p, din care:

Considerăm $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ $z\neq az$ 1p

$g(z)=f(z)+f(\varepsilon z)+g(\varepsilon^2 z)$, $g(\varepsilon z)=f(\varepsilon z)+f(\varepsilon^2 z)+g(\varepsilon^3 z)$ 2p

Problema 3.

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2 x$

a) Aflați $m,n\in\mathbb{R}$ știind că $f\left(x^2\cdot\sqrt[3]{y}\right)=m\cdot f(x)+n\cdot f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

b) Dacă $a,b\in(0,\infty)$ astfel încât $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$, determinați $\frac{a}{b}$.

c) Demonstrați că, dacă $a,b\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, atunci $a\log_2 a+b\log_2 b\le-(a+b)\log_2(a+b)$.

Soluție:

3.a) - 1p

$m=2$, $n=\frac{1}{3}$ 1p

3.b) - 2p

Relația este echivalentă cu $\frac{\mathrm{a+b}}{2}=\sqrt{\mathrm{ab}}$, deci $\frac{a}{b}=1$ 2p

c) 4 p, din care:

$a\left[log_2 a(a+b)\right]+b\left[log_2 b(a+b)\right]\le 0$ 1p

$log_2\left[a(a+b)\right]^a.\left[b(a+b)\right]^b\le 0$ 1p

$a^a(a+b)^{a+b}b^b\le 1 \Leftrightarrow a^ab^b\le\frac{1}{(a+b)^{a+b}}$ 1p

De unde concluzia: $a\log_2 a+b\log_2 b\le$-$(a+b)$ 1p

Problema 4.

a) În sistemul xOy se consideră un triunghi echilateral astfel încât afixele a două dintre vârfuri sunt $z_1=0, z_2=2$. Determinați afixul celui de-al treilea vârf al acestui triunghi.

b) Demonstrați că, dacă z_1,z_2,z_3 sunt numere complexe astfel încât $z_1+z_2+z_3=0, |z_1|=|z_2|=|z_3|$, atunc$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

Soluție:

4.a) - 4 p, din care:

$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$. Notăm $z_3=a+bi, a,b\in$ R..1p

Obținem $|-2|=|2-a-bi|=|a+9bi|$ 1p

$$\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a^2+b^2=a^2-4a+4+b^2 \end{cases}$$, cu soluțiile $(1,-\sqrt{3}),(1,\sqrt{3})$. 1p

Al treilea vârf al triunghiului are afixul $z_3=1+\sqrt{3}i$ sau $z_3=1-\sqrt{3}i$. 1p

4.b) - 3 p, din care:

Fie $M_i(z_i), i=\overline{1,3}$. Centrul de greutate G al triunghiului $M_1M_2M_3$ are afixul

$z_G=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)=0$ 1p

Dar $|z_1| = |z_2| = |z_3|$, deci $OM_1 = OM_2 = OM_3$, de unde rezultă că triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral, deci $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ ……………………………………………………………..2p